JOURNAL OF NUMBER THEORY 8, 352–365 (1976)

Kongruenzen zwischen Klassenzahlen quadratischer Zahlkörper*

H. LANG AND R. SCHERTZ

Mathematisches Institut der Universität Münster, Roxelerstr. 64, Germany and Mathematisches Institut der Universitat Köln, Weyertal 86-90, Germany

Communicated by P. J. Roquette

Received July 6, 1973

Der Zusammenhang zwischen den Klassenzahlen der quadratischen Körper mit den Diskriminanten D und $-3D$ ist bereits mehrfach in Arbeiten von Scholz [9], Herz [4], Ankeny, Artin und Chowla [1] untersucht worden. Alle diese Resultate beziehen sich auf die Teilbarkeit durch 3 der beiden Klassenzahlen. Ähnliche Untersuchungen über die Beziehung zwischen den Klassenzahlen der Körper $\mathbb{Q}(D^{1/2})$ und $\mathbb{Q}((-4D)^{1/2})$ sind in [8] durchgeführt worden.

In der vorliegenden Arbeit werden nun allgemein Kongruenzen zwischen den Klassenzahlen von $\mathbb{Q}(D^{1/2})$, $D > 0$, und $\mathbb{Q}((D_0D)^{1/2})$ für eine beliebige negative Diskriminante D_0 hergeleitet. Der Ausgangspunkt ist dabei ähnlich wie in [8] eine Klassenzahlformel von Dirichlet–Kronecker–Meyer sowie eine daraus nach einer Methode von Stark abgeleitete Klassenzahlformel. Die erstgenannte Klassenzahlformel kommt dadurch zustande, daß man den Körper $\mathbb{Q}(D^{1/2}, D_0^{1/2})$ einmal als Kreiskörper und zum anderen als relativabelsche Erweiterung des reell-quadratischen Körpers $\mathbb{Q}(D^{1/2})$ auffaßt. Die in den Klassenzahlformeln auftretenden Klasseninvarianten sind rationale Zahlen. Aus der arithmetischen Struktur dieser Invarianten, die abgesehen von einer Ergänzung in Abschnitt 2 bereits von Lang in [5] untersucht worden ist, lassen sich neuartige Kongruenzen zwischen den Klassenzahlen quadratischer Körper herleiten. Als Folgerung aus diesen Kongruenzen ergeben sich erneut einige der mittels komplexer Multiplikation bewiesenen Teilbarkeitsaussagen aus [8], sowie ein großer Teil der Resultate in [1, 4, 9].

1. KLASSENZAHLFORMELN

a) *Die Kroneckersche Grenzformel.* Sei $\Sigma = \mathbb{Q}(D^{1/2})$ ein reell-quadratischer Zahlkörper mit der Diskriminante $D > 0$. Für eine natürliche Zahl f bezeichne $\mathfrak{R}_{f\mathfrak{p}_\infty}$ die Ringdivisorenklassengruppe modulo $f\mathfrak{p}_\infty$. χ sei

* Diese Arbeit entstand im Rahmen eines von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Forschungsvorhabens.

ein eigentlicher Charakter von $\mathfrak{R}_{f\mathfrak{p}_\infty}$ zum Führer $f_\chi = f\mathfrak{p}_\infty$. Wir betrachten die hiermit gebildete L-Reihe

$$L(s, \chi) = \sum_{\mathfrak{g}} \frac{\chi(\mathfrak{g})}{N(\mathfrak{g})^s}, \tag{1.1}$$

in der die Summation über alle ganzen Divisoren von Σ zu erstrecken ist. Hierfür hat man nach Meyer [6]

$$L(s, \chi) = \tfrac{1}{2} \sum_{\mathfrak{k} \in \mathfrak{R}_{f_\chi}} \chi(\mathfrak{k})\, L(s, \mathfrak{k}), \tag{1.2}$$

wobei $L(s, \mathfrak{k})$ die erweiterte L-Funktion der Ringklasse $\mathfrak{k}$ bezeichnet.

Das Verhalten dieser L-Reihen für $s \to 1^+$ wird duch die Kroneckersche Grenzformel [6]

$$L(s, \mathfrak{k}) = \frac{(2\pi)^2}{fD^{1/2}}\, \Phi(\mathfrak{k}) + O(s-1) \tag{1.3}$$

beschrieben. Die hierin auftretende Invariante $\Phi(\mathfrak{k})$ ist folgendermassen definiert:

$\mathfrak{c}$ sei ein ganzer Divisor aus $\mathfrak{k}^{-1}$ und $\mathfrak{c}_f = \mathfrak{c} \cap R_f$ das zugehörige Ringideal, welches durch Schnittbildung mit R_f, der Ordnung zum Führer f in Σ, entsteht. In $\mathfrak{c}_f$ wählen wir eine Basis

$$(\gamma_1, \gamma_2), \text{ mit } \gamma_1\gamma_2' - \gamma_2\gamma_1' > 0. \tag{1.4}$$

Ist $\epsilon_f > 1$ die Grundeinheit von R_f, so gilt

$$\epsilon_f \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix} = M \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix} \tag{1.5}$$

mit einer unimodularen Matrix $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)$ der Determinante $+1$. Man beachte hierbei, dass nach Voraussetzung ein Ringklassencharakter mit dem Führer $f\mathfrak{p}_\infty$ existiert, die Ringklasseneinteilungen modulo f und $f\mathfrak{p}_\infty$ also verschieden sind und somit $N(\epsilon_f) = +1$ sein muss. Durch die unimodulare Matrix M ist nun $\Phi(\mathfrak{k})$ erklärt vermöge

$$\Phi(\mathfrak{k}) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \log\left(\eta\left(\frac{a\omega + b}{c\omega + d}\right)\Big/(c\omega + d)^{1/2}\right) - \log(\eta(\omega)) \right\}. \tag{1.6}$$

Hierin bezeichnet $\eta(\omega)$ die Dedekindsche η-Funktion, und die auftretende Quadratwurzel ist mit positivem Realteil zu nehmen.

Im Hinblick auf die bekannte Transformationsformel für $\log(\eta(\omega))$ (vgl. [7]) ist hiernach $\Phi(\mathfrak{k})$ eine rationale Zahl mit Höchstnenner 24.

Jede Ringdivisorenklasse modulo f besteht wegen $N(\epsilon_f) = +1$ aus zwei Ringdivisorenklassen $\mathfrak{k}$, $\hat{\mathfrak{k}}$ modulo fp_∞. Hierfür ist nach [6]

$$L(s, \mathfrak{k}) = -L(s, \hat{\mathfrak{k}}), \tag{1.7}$$

und daher hat man

$$\Phi(\mathfrak{k}) = -\Phi(\hat{\mathfrak{k}}). \tag{1.8}$$

(b) *Die Klassenzahlformel von Dirichlet–Kronecker–Meyer.* Sei K ein imaginärer bizyklischer biquadratischer Zahlkörper und $\Sigma = \mathbb{Q}(D^{1/2})$ sein reell-quadratischer Teilkörper. Dann enthält K neben Σ noch genau zwei komplexe quadratische Zahlkörper mit den Diskriminanten G, T:

$$\begin{tikzcd}
& K \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathbb{Q}(T^{1/2}) \arrow[dr, dash] & \mathbb{Q}(D^{1/2}) \arrow[d, dash] & \mathbb{Q}(G^{1/2}). \arrow[dl, dash] \\
& \mathbb{Q} &
\end{tikzcd} \tag{1.9}$$

Hierbei gilt mit einer natürlichen Zahl f:

$$GT = f^2 D. \tag{1.10}$$

Bei diesen Gegebenheiten besteht die Identität

$$L_{\mathbb{Q}(T^{1/2})}(s)\, L_{\mathbb{Q}(G^{1/2})}(s) = L(s, \chi). \tag{1.11}$$

Hierin sind $L_{\mathbb{Q}(T^{1/2})}(s)$ und $L_{\mathbb{Q}(G^{1/2})}(s)$ die zu den imaginär-quadratischen Teilkörpern gehörigen Dirichletschen L-Reihen, und $L(s, \chi)$ ist die mit dem zu der Erweiterung K/Σ gehörigen quadratischen Charakter gebildete L-Reihe der Form (1.1).

Nach [2] ist K Ringklassenkörper über Σ und somit χ ein Ringklassencharakter. Der Führer von χ ergibt sich aus dem Führer-Diskriminantensatz und dem Schachtelungssatz zu

$$f_\chi = fp_\infty \tag{1.12}$$

mit der natürlichen Zahl f aus (1.10). Für Primdivisoren $\mathfrak{p}$ von Σ lässt such $\chi(\mathfrak{p})$ mit Hilfe des Kroneckerschen Symbols angeben durch [5]:

$$\begin{aligned}
\chi(\mathfrak{p}) &= \left(\frac{T}{N(\mathfrak{p})}\right), && \text{falls } \mathfrak{p} \nmid T, \\
&= \left(\frac{G}{N(\mathfrak{p})}\right), && \text{falls } \mathfrak{p} \nmid G, \\
&= 0, && \text{falls } \mathfrak{p} \mid f.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Mit Rücksicht auf (1.3), (1.8) und die bekannten Formeln für die Werte $L_{\mathbb{Q}(T^{1/2})}(1)$, $L_{\mathbb{Q}(G^{1/2})}(1)$ erhält man die Klassenzahlformel

$$\sum_{\mathfrak{k}\in\mathfrak{R}^+_{f\mathfrak{p}_\infty}} \Phi(\mathfrak{k}) = \frac{h_G h_T}{w_G w_T}. \tag{1.14}$$

Hierin ist

$$\mathfrak{R}^+_{f\mathfrak{p}_\infty} = \{\mathfrak{k} \in \mathfrak{R}_{f\mathfrak{p}_\infty} \mid \chi(\mathfrak{k}) = +1\}. \tag{1.15}$$

h_G, h_T bezeichnen die Klassenzahlen und w_G, w_T die Einheitswurzelanzahlen der entsprechenden Körper.

(c) *Das Analogon einer Klassenzahlformel von Stark.* Sei U eine Untergruppe der absoluten Charaktergruppe und χ_0 ein Ringklassencharakter von Σ mit $p_\infty \mid f_{\chi_0}$. Für alle χ aus U besitzen dann die Charakters $\chi\chi_0$ denselben Führer

$$f_{\chi\chi_0} = f_{\chi_0} = f\mathfrak{p}_\infty. \tag{1.16}$$

Sei nun

$$\mathfrak{U} = \{\mathfrak{k} \in \mathfrak{R}_{f_{\chi_0}} \mid \chi(\mathfrak{k}) = 1 \text{ für alle } \chi \in U\}. \tag{1.17}$$

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ seien Nebenklassen von $\mathfrak{U}$. Die mit $\chi\chi_0$, $\chi \in U$, vermöge (1.2) gebildeten L-Reihen lassen sich aufspalten in

$$L(s, \chi\chi_0) = \sum_{\mathfrak{B} \bmod \mathfrak{U}} \chi(\mathfrak{B})\, L(s, \chi_0, \mathfrak{B}), \tag{1.18}$$

mit

$$L(s, \chi_0, \mathfrak{B}) = \tfrac{1}{2} \sum_{\mathfrak{k}\in\mathfrak{B}} \chi_0(\mathfrak{k})\, L(s, \mathfrak{k}). \tag{1.19}$$

Multipliziert man die Gleichung (1.18) mit $\chi(\mathfrak{A}^{-1})$ und summiert anschliessend über alle Charaktere χ aus U, so entsteht die Formel

$$\sum_{\chi\in U} \chi(\mathfrak{A}^{-1})\, L(s, \chi\chi_0) = [U : 1]\, L(s, \chi_0, \mathfrak{A}). \tag{1.20}$$

Sei jetzt speziell U die Untergruppe aller Geschlechtercharaktere modulo 1 von Σ. Dies sind alle Charaktere der Form (1.13), wobei G, T Diskriminanten reell-quadratischer Zahlkörper bzw. $G = 1$, $T = D$ mit $GT = D$ sind. $D_0 < 0$ sei die Diskriminante eines imaginär-quadratischen Zahlkörpers und χ_0 der zu der Erweiterung $\Sigma(D_0^{1/2})/\Sigma$ gehörige quadratische Charakter. Da wegen $D_0 < 0$ der Körper $\Sigma(D_0^{1/2})$ imaginär ist, gilt

$p_\infty \mid f_{\chi_0}$ und (1.16) ist erfüllt. Aus (1.20) folgt nun unter Beachtung von (1.8) und (1.14) die Klassenzahlformel

$$\sum_{\substack{G,T>0\\ GT=D}} \chi_{G,T}(\mathfrak{A}) \frac{h_{D_0G} h_{D_0T}}{w_{D_0G} w_{D_0T}} = [U:1] \sum_{\mathfrak{k}\in\mathfrak{A}^+} \Phi(\mathfrak{k}). \tag{1.21}$$

Hierin ist abkürzend $\mathfrak{A}^+ = \{\mathfrak{k} \in \mathfrak{A} \mid \chi_0(\mathfrak{k}) = 1\}$ gesetzt. h_{D_0G}, h_{D_0T} bezeichnen die Klassenzahlen und w_{D_0G}, w_{D_0T} die Einheitswurzelanzahlen von $\mathbb{Q}((D_0G)^{1/2})$ bzw. $\mathbb{Q}((D_0T)^{1/2})$. Der Index $[U:1]$ ergibt sich im vorliegenden Fall aus der Geschlechtertheorie zu

$$[U:1] = 2^{r'-1}. \tag{1.22}$$

Bezeichnet r die Anzahl der Primteiler von D, so ist dabei $r' = r$ bzw. $r' = r - 1$, je nachdem D ein Produkt positiver Primdiskriminanten ist oder nicht.

2. Die Berechnung der Φ-Invariante Modulo 8

Die Auswertung der Klassenzahlformeln (1.14) und (1.21) stützt sich auf die Partialbruchzerlegung der Ringklasseninvariante $\Phi(\mathfrak{k})$. Der Wert $24\Phi(\mathfrak{k})$ mod 4 ist in [5] eingehend untersucht worden. Für ihn gilt:

Es bezeichne $D_f = f^2D$ die Diskriminante der zu f gehörigen Ordnung R_f von Σ. Damit werde die Grundeinheit $\epsilon_f > 1$ von R_f in der Form

$$\epsilon_f = \tfrac{1}{2}(u_f + v_f D_f^{1/2}) > 1 \tag{2.1}$$

geschrieben. Dann bestehen die Kongruenzen

$$\begin{aligned}
24\Phi(\mathfrak{k}) &\equiv v_f(u_f - 3)\,\chi_{-4}(\mathfrak{k}) \bmod 4, && \text{für } 2 \nmid v_f,\ 2 \mid D_f,\\
&\equiv v_f(u_f - 3) \bmod 4, && \text{für } 2 \nmid v_f,\ 2 \nmid D_f,\\
&\equiv u_f v_f(D_f - 4)/8 + 3(u_f - 2)/2 \bmod 4, && \\
& && \text{für } 2 \mid v_f,\ 2 \mid D_f,\\
&\equiv 3(u_f - 2)/2 \bmod 4, && \text{für } 2 \mid v_f,\ 2 \nmid D_f.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Hierbei bedeutet χ_{-4} den der Erweiterung $\Sigma((-4)^{1/2})/\Sigma$ eindeutig zugeordneten Ringklassencharakter. Für seinen Führer $f_{\chi_{-4}} = f_{-4}p_\infty$ hat man gemäss (1.10):

$$\begin{aligned}
f_{-4} &= 1, && \text{für } D \equiv 4 \bmod 8,\\
&= 2, && \text{für } D \equiv 0 \bmod 8,\\
&= 4, && \text{für } D \equiv 1 \bmod 4.
\end{aligned}$$

In dem oben zuerst genannten Fall $2 \nmid v_f$, $2 \mid D_f$ ist f_{-4} notwending ein Teiler von f. In den anderen drei Fällen stellt $24\Phi(\mathfrak{k})$ eine gerade Zahl dar. Man sieht hieraus

$$24\Phi(\mathfrak{k}) \equiv 24\Phi(\mathfrak{k})\,\chi_{-4}(\mathfrak{k}) \bmod 4, \qquad \text{für } f_{\chi_{-4}} \mid fp_\infty \text{ und } (2 \mid v_f \text{ oder } 2 \nmid D_f). \tag{2.3}$$

Ist $\mathfrak{k}$ sogar das Quadrat einer Ringklasse mod fp_∞, so lässt such (2.2) zu einer Kongruenz mod 8 verschärfen. Das soll jetzt ausgeführt werden.

Aus dem Transformationsverhalten von $\log(\eta(\omega))$ [7] entnimmt man für $c > 0$:

$$\begin{aligned}
24\Phi(\mathfrak{k}) &= \frac{24}{2\pi}\left\{\log\left(\eta\left(\frac{a\omega+b}{c\omega+d}\right)\Big/(c\omega+d)^{1/2}\right) - \log(\eta(\omega))\right\} \\
&\equiv 6\left\{1-\left(\frac{a}{c}\right)\right\} + ab + 2ac - 3c + cd(1-a^2) \bmod 24, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{falls } 2 \nmid c, \\
&\equiv 6\left\{1-\left(\frac{c}{a}\right)\right\} + ab - ac + 3a - 3 + cd(1-a^2) \bmod 24, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{falls } 2 \mid c.
\end{aligned}$$

Wegen $ad - bc = 1$ ist nun

$$ab - 2ac - 3c + cd(1-a^2) \equiv ac + cd - 3c + ab(1-c^2).$$

Ausserdem muss a ungerade sein, wenn 2 in c aufgeht. Daher bekommt man für $c > 0$:

$$\begin{aligned}
24\Phi(\mathfrak{k}) &\equiv 6\left\{1-\left(\frac{a}{c}\right)\right\} + ac + cd - 3c \bmod 8, \qquad \text{falls } 2 \nmid c, \\
&\equiv 6\left\{1-\left(\frac{c}{a}\right)\right\} + ab - ac + 3a - 3 \bmod 8, \qquad \text{falls } 2 \mid c.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Ohne Einschränkung kann angenommen werden, dass es sich bei $\mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{k}^{-1}$ um ein ganzes primitives Ideal handelt, das mit 2 keinen gemeinsamen Teiler besitzt. Die Basis (γ_1, γ_2) des Ringideals $\mathfrak{c}_f = \mathfrak{c} \cap R_f$ werde in der kanonischen Form [3]

$$\gamma_1 = \tfrac{1}{2}(g + D_f^{1/2}), \qquad \gamma_2 = N(\mathfrak{c}) \tag{2.5}$$

gewählt. Hierbei bedeutet g eine durch f teilbare nicht negative ganzrationale Zahl, die der Bedingung

$$g \equiv D_f \bmod 2 \tag{2.6}$$

genügt. Da g nur modulo $2N(\mathfrak{c})$ bestimmt ist, kann wegen (2.6) sogar

$$\begin{aligned}
g &\equiv 0 \bmod 32, \qquad \text{für } D_f \equiv 0 \bmod 2, \\
&\equiv 1 \bmod 32, \qquad \text{für } D_f \equiv 1 \bmod 2,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

erreicht werden. Da vorausgesetzt worden ist, dass $\mathfrak{f}$ das Quadrat einer Ringklasse mod fp_∞ ist, kann angenommen werden, dass auch $\mathfrak{c}$ das Quadrat eines Ideals ist. In diesem Fall ist $N(\mathfrak{c})$ eine ungerade Quadratzahl, und man hat

$$N(\mathfrak{c}) \equiv 1 \bmod 8. \tag{2.8}$$

Die Darstellungsmatrix M von ϵ_f bezüglich der Basis (2.5) ergibt sich explizit aus der Matrizengleichung

$$((u_f + v_f D_f^{1/2})/2) \begin{pmatrix} (g + D_f^{1/2})/2 \\ N(\mathfrak{c}) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (u_f + v_f g)/2 & v_f(D_f - g^2)/4N(\mathfrak{c}) \\ N(\mathfrak{c})\, v_f & (u_f - v_f g)/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (g + D_f^{1/2})/2 \\ N(\mathfrak{c}) \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Gemäss (2.4) sind die Fälle $2 \nmid c$ und $2 \mid c$ zu unterscheiden. Da hier $c = N(\mathfrak{c})\, v_f$ und $N(\mathfrak{c})$ ungerade ist, bedeutet das die Fallunterscheidung $2 \nmid v_f$ oder $2 \mid v_f$.

(a) *v_f ist ungerade.* Aus (2.4), (2.7)–(2.9) ergibt sich:

$$24\Phi(\mathfrak{f}) \equiv 2 \left\{ \left(\frac{(u_f + v_f g)/2}{N(\mathfrak{c})\, v_f} \right) - 1 \right\} + v_f(u_f - 3) \bmod 8.$$

Nun ist $N(\mathfrak{c})$ eine ungerade Quadratzahl. Mit (2.7) folgt daher:

$$\left(\frac{(u_f + v_f g)/2}{N(\mathfrak{c})\, v_f} \right) = \left(\frac{(u_f + v_f g)/2}{v_f} \right) = \left(\frac{u_f/2}{v_f} \right), \qquad \text{für } 2 \mid D_f,$$
$$= \left(\frac{(u_f + v_f)/2}{v_f} \right), \qquad \text{für } 2 \nmid D_f.$$

Somit gilt:

$$24\Phi(\mathfrak{f}) \equiv 2 \left\{ \left(\frac{u_f/2}{v_f} \right) - 1 \right\} + v_f(u_f - 3) \bmod 8, \qquad \text{für } 2 \nmid v_f,\ 2 \mid D_f,$$
$$\equiv 2 \left\{ \left(\frac{(u_f + v_f)/2}{v_f} \right) - 1 \right\} + v_f(u_f - 3) \bmod 8, \text{ für } 2 \nmid v_f,\ 2 \nmid D_f. \tag{2.10}$$

(b) *v_f ist gerade.* Ist auch noch D_f durch 2 teilbar, so erhält man aus (2.4), (2.7)–(2.9)

$$24\Phi(\mathfrak{f}) \equiv 2 \left\{ \left(\frac{v_f}{u_f/2} \right) - 1 \right\} + \frac{1}{2} u_f v_f \left(\frac{D_f}{4} - 1 \right) + \frac{3}{2} (u_f - 2) \bmod 8$$
$$\text{für } 2 \mid v_f,\ 2 \mid D_f. \tag{2.11}$$

Hierbei wurde wieder ausgenutzt, dass $N(\mathfrak{c})$ eine ungerade Quadratzahl ist, so dass wegen (2.6) und (2.7) die Gleichung

$$\left(\frac{N(\mathfrak{c})\, v_f}{(u_f + v_f g)/2}\right) = \left(\frac{v_f}{(u_f + v_f g)/2}\right) = \left(\frac{v_f}{u_f/2}\right)$$

besteht.

Für den noch zu behandelnden Fall $2 \nmid D_f$ betrachte man die Pellsche Gleichung

$$u_f^2 - v_f^2 D_f = 4N(\epsilon_f) = 4. \tag{2.12}$$

Mit v_f ist auch u_f eine gerade Zahl. Da $D_f \equiv 1 \bmod 4$ sein muss, gilt demnach

$$(u_f/2)^2 - (v_f/2)^2 \equiv 1 \bmod 4.$$

Diese Kongruenz kann nur erfüllt sein, wenn $u_f/2$ eine ungerade und $v_f/2$ eine gerade Zahl ist. Gemäss (2.12) ergibt sich also

$$(u_f/2)^2 - (v_f/2)^2\, D_f \equiv 1 - (v_f/2)^2\, D_f \equiv 1 \bmod 8.$$

Wegen Teilerfremdheit von 2 und D_f liest man daraus

$$v_f \equiv 0 \bmod 8 \tag{2.13}$$

ab. Wie oben folgt jetzt aus (2.4), (2.7)–(2.9):

$$24\Phi(\mathfrak{f}) \equiv 2\left\{\left(\frac{v_f}{(u_f + v_f)/2}\right) - 1\right\} + \frac{3}{2}(u_f + v_f) - 3 \bmod 8 \qquad \text{für } 2 \mid v_f,\ 2 \nmid D_f. \tag{2.14}$$

Im Hinblick auf die Kongruenzen (2.10), (2.11) und (2.14) werde die Abkürzung

$$\begin{aligned} \rho(u_f, v_f) &= 2\left\{\left(\frac{u_f/2}{v_f}\right) - 1\right\} + v_f(u_f - 3), \qquad \text{für } 2 \nmid v_f,\ 2 \mid D_f, \\ &= 2\left\{\left(\frac{(u_f + v_f)/2}{v_f}\right) - 1\right\} + v_f(u_f - 3), \\ &\qquad\qquad \text{für } 2 \nmid v_f,\ 2 \nmid D_f, \\ &= 2\left\{\left(\frac{v_f}{u_f/2}\right) - 1\right\} + \frac{1}{2} u_f v_f \left(\frac{D_f}{4} - 1\right) + \frac{3}{2}(u_f - 2), \\ &\qquad\qquad \text{für } 2 \mid v_f,\ 2 \mid D_f, \\ &= 2\left\{\left(\frac{v_f}{(u_f + v_f)/2}\right) - 1\right\} + \frac{3}{2}(u_f + v_f) - 3, \\ &\qquad\qquad \text{für } 2 \mid v_f,\ 2 \nmid D_f. \end{aligned} \tag{2.15}$$

eingeführt. Hierbei ist offenbar

$$2\left\{\left(\frac{u_f/2}{v_f}\right)-1\right\}\equiv 2\left\{\left(\frac{(u_f+v_f)/2}{v_f}\right)-1\right\}\equiv 2\left\{\left(\frac{v_f}{u_f/2}\right)-1\right\}$$
$$\equiv 2\left\{\left(\frac{v_f}{(u_f+v_f)/2}\right)-1\right\}\equiv 0 \bmod 4.$$

Beachtet man (2.3) und (2.13), so kann man (2.2) auch in der Form

$$\begin{aligned} 24\Phi(\mathfrak{k}) &\equiv \rho(u_f, v_f)\,\chi_{-4}(\mathfrak{k}) \bmod 4, && \text{für } f_{\chi_{-4}} \mid f\mathfrak{p}_\infty, \\ &\equiv \rho(u_f, v_f) \bmod 4, && \text{für } f_{\chi_{-4}} \nmid f\mathfrak{p}_\infty \end{aligned} \tag{2.16}$$

schreiben.

Die Kongruenzen (2.10), (2.11) und (2.14) lassen sich zusammenfassen zu

$$24\Phi(\mathfrak{k}) \equiv \rho(u_f, v_f) \bmod 8, \text{ wenn } \mathfrak{k} \text{ ein Quadrat ist.} \tag{2.17}$$

3. Kongruenzen für Klassenzahlen quadratischer Körper

Sei $\Sigma = \mathbb{Q}(D^{1/2})$ ein reell-quadratischer Zahlkörper mit der Diskriminante $D > 0$ und $K = \mathbb{Q}(D^{1/2}, (-3^{1/2}))$. Dann ist in (1.10)

$$\begin{aligned} f &= 1, && \text{falls } 3 \mid D, \\ &= 3, && \text{falls } 3 \nmid D. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Der zu der Erweiterung K/Σ gehörige quadratische Charakter ist für zu 3 prime ganze Divisoren $\mathfrak{c}$ von Σ gegeben durch

$$\chi(\mathfrak{c}) = \left(\frac{-3}{N(\mathfrak{c})}\right). \tag{3.2}$$

Schliesst man den Fall $D = 12$ aus, setzt man also voraus, dass K nicht der Körper der 12-ten Einheitswurzeln ist, so lautet die Klassenzahlformel (1.14) im vorliegenden Fall

$$\sum_{\mathfrak{k} \in \mathfrak{R}^+_{f\mathfrak{p}_\infty}} \Phi(\mathfrak{k}) = \frac{h_{-3D}}{3.4}. \tag{3.3}$$

Nach [5] ist nun für $\mathfrak{k} \in \mathfrak{R}^+_{f\mathfrak{p}_\infty}$

$$24\Phi(\mathfrak{k}) \equiv u_f v_f \bmod 3, \tag{3.4}$$

wobei

$$\epsilon_f = (u_f + v_f f D^{1/2})/2 > 1$$

die Grundeinheit von R_f bedeutet. Somit folgt aus (3.3)

$$[\mathfrak{R}^+_{f\mathfrak{p}_\infty}: 1]\, u_f v_f \equiv 2h_{-3D} \bmod 3. \tag{3.5}$$

Zur Berechnung von $[\mathfrak{R}^+_{f\mathfrak{p}_\infty} : 1]$ benötigen wir die bekannte Beziehung

$$h_D(f) = (h_D/e_f) f \prod_{p|f} \left(1 - \left(\frac{D}{p}\right)\frac{1}{p}\right) \tag{3.6}$$

zwischen der Ringklassenzahl modulo f von $\mathbb{Q}(D^{1/2})$ und der gewöhnlichen Klassenzahl h_D von $\mathbb{Q}(D^{1/2})$. e_f bezeichnet den Index der Einheitengruppe der Ordnung zum Führer f von $\mathbb{Q}(D^{1/2})$ in der vollen Einheitengruppe. Dabei gilt

$$e_f \mid f \prod_{p|f} \left(1 - \left(\frac{D}{p}\right)\frac{1}{p}\right). \tag{3.7}$$

Im Fall $3 \mid D$ ist nun laut (3.1) $f = 1$ und ausserdem $N(\epsilon_1) = 1$. Daher ist

$$[\mathfrak{R}^+_{f\mathfrak{p}_\infty}: 1] = \tfrac{1}{2}[\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}_\infty}: 1] = \tfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot h_D = h_D\,,$$

und im Fall $3 \nmid D$ ergibt sich in gleicher Weise mit Rücksicht auf (3.6):

$$[\mathfrak{R}^+_{f\mathfrak{p}_\infty}: 1] = \frac{3 - (D/3)}{e_3}\, h_D\,.$$

Damit haben wir folgenden Satz bewiesen:

SATZ (3.1). *Für $D \neq 12$ gilt*

$$h_D \cdot u_1 v_1 \equiv -h_{-3D} \bmod 3, \qquad \textit{falls } 3 \mid D,$$

$$h_D\, \frac{3 - (D/3)}{e_3}\, u_3 v_3 \equiv -h_{-3D} \bmod 3, \qquad \textit{falls } 3 \nmid D.$$

In dem ausgeschlossenen Fall $D = 12$ hat man bekanntlich $h_{12} = h_{-4} = 1$ und $\epsilon_1 = (4 + 12^{1/2})/2$, also $h_{12} \cdot u_1 v_1 = h_{-4} \bmod 3$.

In den Ergebnissen von Satz (3.1) sind die Resultate von Ankeny, Artin und Chowla [1] sowie von Herz in [4] enthalten. Man vergleiche hierzu auch den Satz von Scholz in [9].

Es soll nun, ausgehend von der Klassenzahlformel (1.21) eine zu Satz (3.1) analoge Kongruenz nach Potenzen von 2 zwischen den in (1.21) auftretenden Klassenzahlen bewiesen werden. Um triviale Komplikationen zu vermeiden, wollen wir uns dabei auf den Fall beschränken, wo $\mathfrak{A} = \mathfrak{U}$ ist. In diesem Fall lautet (1.21) nach Multiplikation mit 24:

$$2^{1-r'} H(D_0\,, D) = \sum_{\mathfrak{k} \in \mathfrak{U}^+} 24\Phi(\mathfrak{k}), \tag{3.8}$$

wobei abkürzend

$$H(D_0, D) = \sum_{\substack{G,T>0 \\ GT=D}} 6 \frac{h_{D_0G} h_{D_0T}}{(w_{D_0G}/2)(w_{D_0T}/2)} \tag{3.9}$$

gesetzt ist. Für die auftretenden Einheitswurzelanzahlen w_t ; $t = D_0G$, D_0T; gilt bekanntlich

$$\begin{aligned} w_t &= 2, &&\text{falls } \mathbb{Q}(t^{1/2}) \neq \mathbb{Q}((-3)^{1/2}),\ \mathbb{Q}(-4)^{1/2}, \\ &= 6, &&\text{falls } \mathbb{Q}(t^{1/2}) = \mathbb{Q}((-3)^{1/2}), \\ &= 4, &&\text{falls } \mathbb{Q}(t^{1/2}) = \mathbb{Q}((-4)^{1/2}), \end{aligned} \tag{3.10}$$

und entsprechend ist der in (3.9) auftretende Nenner

$$\frac{w_{D_0G}}{2} \frac{w_{D_0T}}{2}$$

gleich 1, 2, 3 oder 6.

Die auf der rechten Seite in (3.8) stehende Summe ist eine ganze rationale Zahl, die nun modulo 4 bzw. modulo 8 bestimmt wird. Mit der in (2.15) eingeführten Bedeutung von $\rho(u_f, v_f)$ erhält man zunächst aus (2.16) und (2.17)

$$24\Phi(\mathfrak{k}) \equiv m\rho(u_f, v_f) \bmod 2^\nu, \tag{3.11}$$

und dabei ist

$$\begin{aligned} \nu &= 3, &&\text{falls } \mathfrak{U}^+ \subseteq \mathfrak{R}^2_{f\mathfrak{p}_\infty}, \\ &= 2, &&\text{sonst}, \\ m &= 0, &&\text{falls } f_{\chi_{-4}} \mid f_{\chi_0},\ \chi_{-4} \notin \langle\{\chi_0\}, U\rangle, \\ &= [\mathfrak{U}^+ : 1] &&\text{sonst}. \end{aligned}$$

Der hierin auftretende Index $[\mathfrak{U}^+ : 1]$ ergibt sich mit Rücksicht auf (3.6) zu

$$\begin{aligned} [\mathfrak{U}^+ : 1] &= \frac{1}{2}[\mathfrak{U} : 1] = \frac{[\mathfrak{R}_{f\mathfrak{p}_\infty} : 1]}{2[U : 1]} = \frac{[\mathfrak{R}_f : 1]}{[U : 1]} \\ &= \frac{1}{2^{r'-1}} h_D \frac{1}{e_f} f \prod_{p \mid f} \left(1 - \left(\frac{D}{p}\right)\frac{1}{p}\right). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Zusammen folgt nun aus (3.8), (3.11) und (3.12) die Kongruenz

$$H(D_0, D) \equiv h_D \frac{1}{e_f} f \prod_{p \mid f} \left(1 - \left(\frac{D}{p}\right)\frac{1}{p}\right) \rho(u_f, v_f) \bmod 2^{r'-1+\nu} \tag{3.13a}$$

mit Ausnahme des Falles $f_{\chi_{-4}} \mid f_{\chi_0}$, $\chi_{-4} \notin \langle\{\chi_0\}, U\rangle$, in dem

$$H(D_0, D) \equiv 0 \bmod 2^{r'+1} \text{ gilt.} \tag{3.13b}$$

Hierbei haben r' und ν die in (1.22) und (3.11) angegebenen Bedeutungen. Bei der Herleitung der zweiten Kongruenz in (3.13) beachte man, dass im Fall $f_{\chi_{-4}} \mid f_{\chi_0}$, $\chi_{-4} \notin \langle\{\chi_0\}, U\rangle$ offenbar $\langle\{\chi_0\}, U\rangle$ eine echte Untergruppe der quadratischen Charaktere von $\mathfrak{R}_{f p_\infty}$ darstellt. Demzufolge ist $\mathfrak{U}^+$ nicht in $\mathfrak{R}^2_{f p_\infty}$ enthalten und daher in (3.13) $\nu = 2$.

Im folgenden wollen wir in einigen Spezialfällen der Kongruenzen (3.13) die Konstanten r' und ν bestimmen sowie einige Folgerungen aus (3.13) ableiten.

Sei zunächst die negative Diskriminante D_0 ein Teiler von D. Dann ist offenbar D kein Produkt positiver Primdiskriminanten und somit $r' = r - 1$. Weiter ist im vorliegenden Fall $f_{\chi_0} = p_\infty$ und somit $U' = \langle\{\chi_0\}, U\rangle$ gleich der Gruppe aller quadratischen Charaktere von $\mathfrak{R}_{p_\infty}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}^+ &= \{\mathfrak{k} \in \mathfrak{R}_{p_\infty} \mid \chi(\mathfrak{k}) = 1 \text{ für alle } \chi \text{ aus } U \text{ und } \chi_0(\mathfrak{k}) = 1\} \\ &= \mathfrak{R}^2_{p_\infty}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Unter der Voraussetzung $D_0 \mid D$ kann der Ausnahmefall (3.13b) nicht eintreten, da im Fall $f_{\chi_{-4}} \mid f_{\chi_0}$, also $f_{\chi_{-4}} = p_\infty$, notwendig schon χ_{-4} aus U' ist. Es besteht daher die erste Kongruenz in (3.13), und hierin ist mit Rücksicht auf (3.14) $\nu = 3$. Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz (3.2). *Im Fall $D_0 \mid D$ besteht die Kongruenz*

$$H(D_0, D) \equiv h_D \rho(u_1, v_1) \bmod 2^{r+1}.$$

Als nächstes betrachten wir den Spezialfall $D_0 = -4$. Hier können wir weiter $D \not\equiv 4 \bmod 8$ voraussetzen, da der Fall $D_0 = -4$, $D \equiv 4 \bmod 8$ schon in Satz (3.2) enthalten ist. Man hat dann

$$\begin{aligned} f_{\chi_0} &= 4p_\infty, && \text{falls } D \equiv 1 \bmod 4, \\ &= 2p_\infty, && \text{falls } D \equiv O \bmod 8. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Ferner ergibt sich wie im Fall $D_0 \mid D$

$$\mathfrak{U}^+ = \mathfrak{R}^2_{f p_\infty}, \text{ falls } D \text{ ein Produkt positiver Primdiskriminanten ist,} \tag{3.16}$$

andererseits aber

$$\mathfrak{U}^+ \supsetneqq \mathfrak{R}_{f\mathfrak{p}}^2, \text{ falls } D \text{ kein Produkt positiver Primdiskriminanten ist.} \tag{3.17}$$

Hiernach erhält man aus (3.13) den

SATZ (3.3). *Im Fall* $D \equiv 1 \bmod 4$ *ist*

$$H(-4, D) \equiv h_D \frac{2(2-(D/2))}{e_4} \rho(u_4, v_4) \bmod 2^{r+\mu},$$

und im Fall $D \equiv O \bmod 8$ *hat man*

$$H(-4, D) \equiv h_D(2/e_2)\, \rho(u_2, v_2) \bmod 2^{r+\mu}.$$

Dabei ist $\mu = 2$ bzw. $\mu = 0$, *je nachdem* D *ein Produkt positiver Primdiskriminanten ist oder nicht.*

Aus den bisher bewiesenen Kongruenzen lassen sich Beziehungen zwischen den Klassenzahlen h_D und h_{-4D} herleiten. Hierzu ist zu untersuchen, durch welche Potenzen von 2 die in $H(-4, D)$ auftretenden, von h_{-4D} verschiedenen Klassenzahlen teilbar sind. Sei dazu allgemein $d < 0$ die Diskriminante eines imaginär-quadratischen Zahlkörpers und s die Anzahl der Primteiler von d. Dann ist nach der Geschlechtertheorie die Klassenzahl von $\mathbb{Q}(d^{1/2})$ durch 2^{s-1} teilbar. Unter Benutzung dieser Tatsache ergibt sich aus der Definition (3.9) für $H(-4, D)$:

$$\begin{aligned} &H(-4, D) \equiv 3h_{-4D} \bmod 2^{r+\nu} \quad \text{mit} \\ &\nu = -1, \qquad \text{falls } D \equiv 4 \bmod 8,\ D \neq 12, \\ &\quad = 1, \qquad \text{falls } D \equiv 1 \bmod 4, \\ &\quad = 0, \qquad \text{falls } D \equiv O \bmod 8. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Definitionsgemäß ist in den Fällen $D \equiv 4 \bmod 8$, $r = 2$, $D \neq 12$ und $D \equiv 1 \bmod 4$, $r = 1$ sogar

$$H(-4, D) = 3h_{-4D}. \tag{3.19}$$

Aus den Sätzen (3.2) und (3.3) folgt nun

SATZ (3.4). *Für* $D \neq 12$ *ist im Fall* $D \equiv 4 \bmod 8$

$$3h_{-4D} \equiv h_D \rho(u_1, v_1) \bmod 2^{\sigma(r)}$$

mit $\sigma(r) = \max(3, r - 1)$ für $r \neq 3$ und $\sigma(r) = 2$ für $r = 3$. *Ist* $D \equiv 1 \bmod 4$, *so gilt*

$$3h_{-4D} \equiv h_D \frac{2(2 - (D/2))}{e_4} \rho(u_4, v_4) \bmod 2^{\lambda(r)},$$

wobei $\lambda(r) = \max(3, r + 1)$ bzw. $\lambda(r) = r$ *ist, je nachdem D ein Produkt positiver Primdiskriminanten ist oder nicht. Im Fall* $D \equiv O \bmod 8$ *hat man analog*

$$3h_{-4D} \equiv h_D(2/e_2)\, \rho(u_2, v_2) \bmod 2^r.$$

Man vergleiche in diesem Zusammenhang die Sätze (2.5)–(2.7) in [8], die mittels komplexer Multiplikation aus einer zu (1.21) analogen Klassenzahlformel gewonnen wurden. Der dort bewiesene Satz (2.7) ist in dem hier bewiesenen Satz (3.4) enthalten. Den Satz (2.6) aus [8] kann man jedoch nicht aus den hier bewiesenen Sätzen folgern.

LITERATUR

1. N. C. ANKENY, E. ARTIN, S. CHOWLA, The class-number of real quadratic number fields, *Ann. of Math.* **56** (1952), 479–493; The Collected Papers of E. Artin, pp. 234–248, 1965.
2. F. HALTER-KOCH, Geschlechtertheorie der Ringklassenkörper, *J. Reine Angew. Math.* **250** (1971), 107–108.
3. H. HASSE, "Vorlesungen über Zahlentheorie," Berlin–Göttingen–Heidelberg–New York, 1964.
4. C. S. HERZ, *in* "Seminar on Complex Multiplication, Lecture Notes in Mathematics," Vol. 21, Springer-Verlag, Berlin, 1966.
5. H. LANG, Über die Klassenzahl eines imaginären bizyklischen biquadratischen Zahlkörpers und seines reell-quadratischen Teilkörpers, *J. Reine Angew. Math.* **262/263** (1973), 18–40.
6. C. MEYER, "Die Berechnung der Klassenzahl abelscher Körper über quadratischen Zahlkörpern," Berlin 1957.
7. C. MEYER, Über einige Anwendungen Dedekindscher Summen, *J. Reine Angew. Math.* **198** (1957), 143–203.
8. R. SCHERTZ, *L*-Reihen in imaginär-quadratischen Zahlkörpern und ihre Anwendung auf Klassenzahlprobleme bei quadratischen und biquadratischen Zahlkörpern I, II, *J. Reine Angew. Math.* **262/263** (1973), 120–133; **270** (1974), 195–212.
9. A. SCHOLZ, Über die Beziehung der Klassenzahlen quadratischer Körper zueinander, *J. Reine Angew. Math.* **166** (1932), 201–203.
10. C. L. SIEGEL, Lectures on advanced analytic number theory, Notes by S. Raghavan, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1965.
11. J. M. STARK, A transcendence theorem for class-number problems, *Ann. Math.* **94** (1971), 153–173.